

Расчет показателя Херста с целью выявления трендовости (персистентности) финансовых рынков и макроэкономических показателей

Введение

Эрик Найман

Целью настоящей работы является проверка гипотезы эффективного рынка (Effective Market Hypothesis, EMH), а также гипотезы фрактального рынка (Fractal Market Hypothesis, FMH), которая является альтернативой гипотезы эффективного рынка.

В настоящий момент исследователи рыночных и экономических показателей используют для своих вычислений математический аппарат теории вероятностей. Однако она призвана работать со случайными явлениями и рядами. При этом никто не доказал, что рынок и экономика являются случайными событиями, что прошлое не влияет на будущее этих явлений.

Так как при помощи показателя Херста можно вычислить фрактальную размерность, то он является необходимым элементом фрактальной геометрии. Кроме того, при помощи показателя Херста можно отличить случайный ряд от неслучайного, даже если случайный ряд не нормально распределен. Таким образом, мы возьмем показатель Херста в качестве основы для вычисления рыночных и экономических рядов данных с целью выяснить - случайны или не случайны они, а также получения дополнительной важной практической информации об этих явлениях.

Показатель Херста

Показатель Херста (H, Hurst coefficient¹) назван в честь британского гидролога Гарольда Херста (Harold Edwin Hurst). Данный показатель позволяет вычислить фрактальную размерность и является, таким образом, инструментом фрактальной геометрии.

Фрактал является аттрактором (пределом и целью) движения хаотической системы. Почему эти понятия идентичны? В странном аттракторе, также как и во фрактале, по мере увеличения выявляется все больше деталей, т.е. срабатывает принцип самоподобия. Как бы мы не изменяли размер аттрактора, он всегда останется пропорционально одинаковым.

Самоподобие на рынках можно увидеть при чтении обыкновенных графиков. Например, попробуйте различить минутный, часовой и дневной график любого товара и вы увидите, насколько они похожи и однообразны. В техническом анализе типичным примером фрактала являются «волны Эллиота», при построении которых также работает принцип самоподобия.

Первым наиболее известным и авторитетным ученым, исследовавшим фракталы, был Бенуа Мандельброт. В середине 60-х годов XX века он разработал фрактальную геометрию или, как он ее еще назвал – геометрию природы. Мандельброт написал свой известный труд «Фрактальная геометрия природы» (The Fractal Geometry of Nature). Многие называют Мандельброта отцом фракталов, т.к. он первым начал использовать их применительно к анализу нечетких, неправильных форм.

Еще одна идея, заложенная во фрактальности, заключается в нецелых измерениях. Мы обычно говорим об одномерном, двумерном, трехмерном и т.д. целочисленном мире. Однако могут существовать и нецелые измерения, например, 2.58, т.е. находящееся между двумерным и трехмерным измерениями. Такие измерения Мандельброт называет фрактальными.

Логика существования нецелых измерений очень простая. Так, в природе вряд ли найдется идеальный шар или куб, без царапин, выщербин и других неправильностей. Следовательно, трехмерное измерение этого реального шара или куба неадекватно. И для описания таких объектов должны существовать другие измерения. Вот для измерения таких неправильных, фрактальных фигур и было введено понятие фрактальное измерение.

Например, скомкайте лист бумаги в плотный комочек. С точки зрения классической евклидовой геометрии новообразованный объект будет являться трехмерным шаром. Однако в действительности это по-прежнему всего лишь двумерный лист бумаги, пусть и скомканный в подобие шара. Отсюда можно предположить, что новый объект будет иметь измерение больше двух, но меньше трех. Это плохо укладывается в евклидовую геометрию, но хорошо может быть описано с помощью фрактальной геометрии, которая будет утверждать, что новый объект будет находиться во фрактальном измерении, приблизительно равном 2.5, т.е. иметь фрактальную размерность около 2.5. Физический смысл этой размерности очень прост. Он означает, что в

классическом трехмерном пространстве остается незаполненной из-за естественно имеющихся в скопленном листе бумаги пробелов и дырок часть пространства.

Существует как минимум две вариации фрактальной размерности – D и A. Так, фрактальную размерность D [размерность временного следа – это оценка степени изломанности ряда] определяют по следующей формуле:

$$D = 2 - H. \quad (1)$$

Бенуа Мандельброт (Benoît B. Mandelbrot) в своей работе² показал, что фрактальная размерность является обратной величиной от H. Например, при H = 0.5 фрактальная размерность равна 2 (1/0.5), а при H = 0.8 фрактальная размерность равна 1.25 (1/0.8). Таким образом, фрактальную размерность по Мандельброту A [размерность пространства вероятностей – оценка толщины хвостов в функции плотности вероятности] рассчитывают по формуле:

A	=	1/H. (2)		
Показатель Херста H	H ≈ 0	H = 0.5	H = 1	
Фрактальная размерность D	D ≈ 2	D = 1.5	D = 1	
Фрактальная размерность A	A → ∞	A = 2	A = 1	
	Прямая линия	Случайный ряд	Бесконечный линейный тренд	

При H = 0.5 рынок выглядит, словно броуновское движение, абсолютно случайно. Причем случайность выявляется, даже если ряд не нормально распределенный. Если показатель Херста на конкретном рынке равен 0.5, то это подтвердит гипотезу об эффективном рынке. Однако практика показывает, что такие ситуации являются очень редкими. То есть рынок если и является эффективным, то очень редко и скорее случайно, чем закономерно.

В основу расчетов Херст положил формулу из работы Альберта Эйнштейна о броуновском движении частиц:

$$R = \sqrt{T}, \text{ где} \quad (3)$$

R – расстояние, пройденное броуновской частицей за время T;
T – показатель времени.

Согласно этой формуле броуновская частица продвигалась на расстояние, равное квадратному корню времени, затраченному на это продвижение. При H = 0.5 система проходит за время T то же расстояние что и броуновская частица. При больших значениях H система проходит более значительное расстояние за то же время T что и броуновская частица.

Расчет показателя Херста можно произвести по следующей формуле:

$$R / S = (aN)^H, \text{ откуда} \quad (4)$$

$$H = \frac{\log(R / S)}{\log(aN)}, \text{ где} \quad (5)$$

H – показатель Херста;

S – среднеквадратичное отклонение ряда наблюдений x;

R – размах накопленного отклонения Zu;

N – число периодов наблюдений;

a – заданная константа, положительное число (автор показателя Херст эмпирически рассчитал эту константу для сравнительно краткосрочных временных рядов природных явлений как 0.5, но это не более чем простое допущение. Мое мнение, для расчета H лучше подходит a = 1.5708, как мы увидим дальше).

$$S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - X_{cp})^2}, \text{ где} \quad (6)$$

X_{cp} – среднее арифметическое ряда наблюдений x за N периодов:

$$X_{cp} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (7)$$

Размах накопленного отклонения R является наиболее важным элементом формулы расчета показателя Херста. В общем виде его вычисляют следующим способом:

$$R = \max_{1 \leq u \leq N} (Z_u) - \min_{1 \leq u \leq N} (Z_u), \text{ где} \quad (8)$$

Z_u – накопленное отклонение ряда x от среднего X_{cp} :

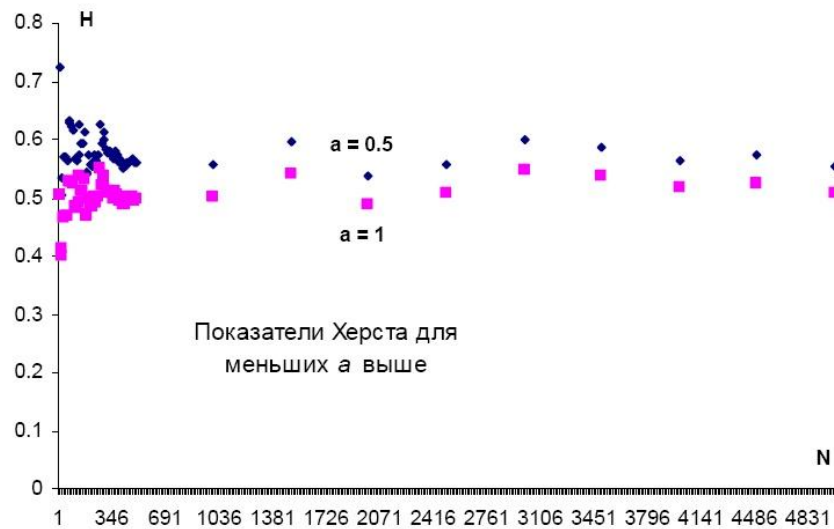
$$Z_u = \sum_{i=1}^u (x_i - X_{cp}). \quad (9)$$

Из формулы расчета показателя Херста видно, что на его рост влияют:

- увеличение размаха колебаний R ;
- уменьшение среднквадратичного отклонения S ;
- уменьшение количества наблюдений N .

При небольшом количестве наблюдений N показатель Херста имеет склонность даже на случайных рядах оценивать их как персистентные (обладающие трендами), завышая H (см. рис. 1).

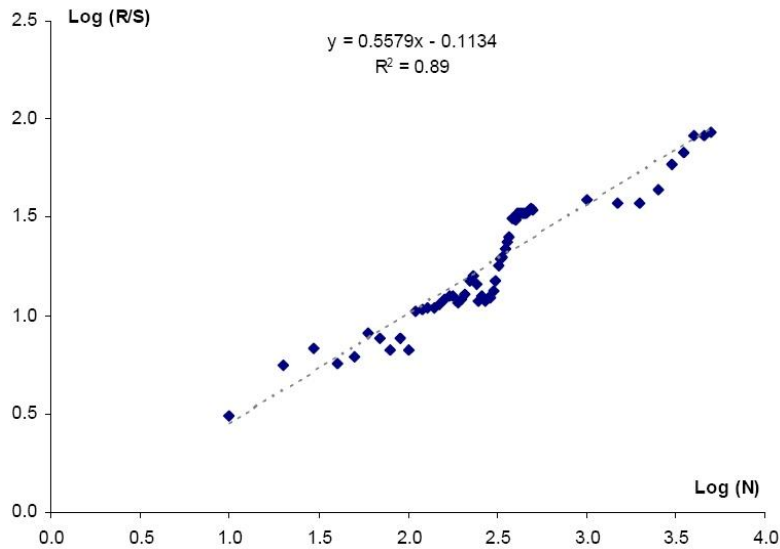
Рисунок 1. Пример корреляции между показателем Херста H и количеством наблюдений N (до 5000), два примера идентичных случайных рядов (здесь и дальше под случайным рядом понимается сгенерированный электронной таблицей ряд случайных чисел) при константе $a=0.5$ и $a=1.0$



Источник: собственные расчеты

При определении N полезен анализ корреляционной взаимосвязи между $\log(R/S)$ и $\log(N)$. На точках излома этой зависимости (а их может быть несколько на одном графике) и находятся N . У математического значения N есть интересная и важная психологическая подоплека – в течение данного интервала времени жива память рынка о первоначальной информации. И так как значимых информаций может быть много, то циклу жизни каждой информации (начиная от момента появления до условной «смерти») соответствует свое значение N .

Рисунок 2. Пример корреляции между $\log(R/S)$ и $\log(N)$ случайного ряда (так называемый R/S-анализ)



Источник: собственные расчеты

Расчет константы a

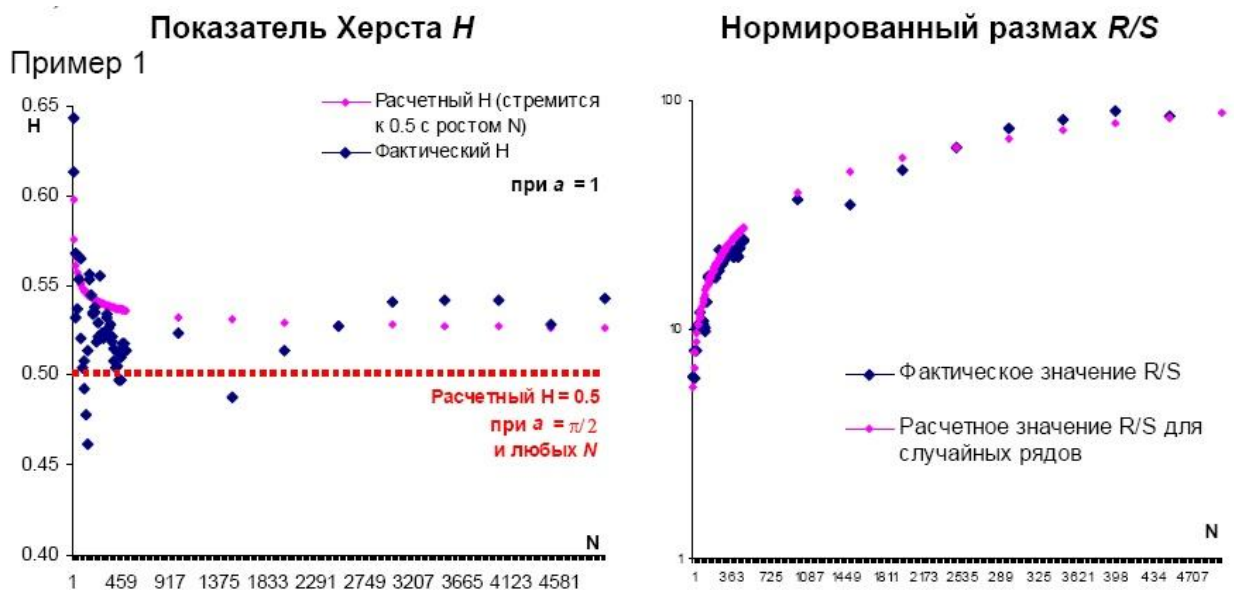
Для анализа рядов случайных блужданий Херст предложил использовать следующую формулу расчета нормированного размаха R/S:

$$R/S = \sqrt{\frac{N\pi}{2}} \quad (10)$$

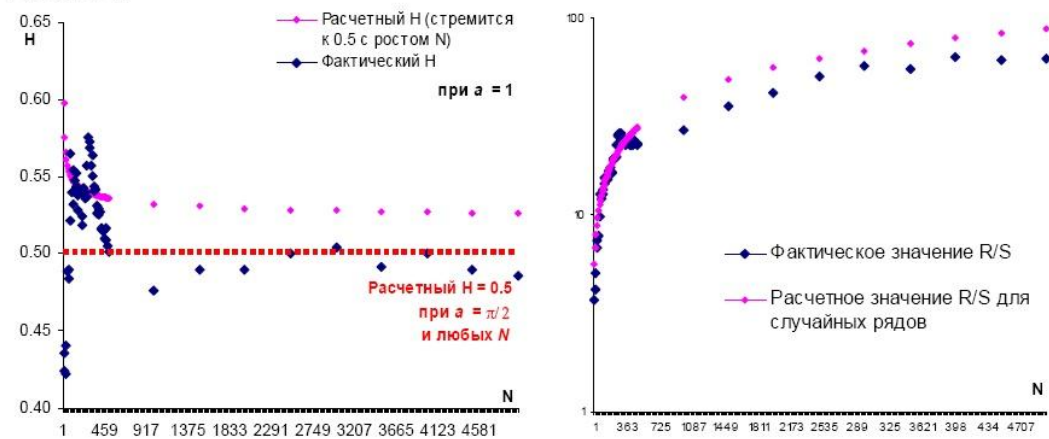
И хотя данная формула не имеет формального доказательства, мои расчеты подтверждают ее право на существование. Например, 65530 испытаний случайных рядов при $N = 5000$ дали средний результат $R/S = 87.5963$ при стандартном отклонении 19.2007 и теоретическом значении, рассчитанном по приведенной выше формуле 10, $R/S = 88.6227$.

С увеличением количества наблюдений N фактические значения R/S стремятся к теоретическим (см. рис. 3).

Рисунок 3. Сравнение расчетных значений H и R/S (по формуле 10), а также фактических значений этих показателей, для разного количества наблюдений N , два случайных ряда (65530 испытаний)



Пример 2



Источник: собственные расчеты

Из формул 4 и 10 можно рассчитать константу a для случайных рядов, так как известно значение показателя Херста для таких рядов ($H = 0.5$):

$$a = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708. \tag{11}$$

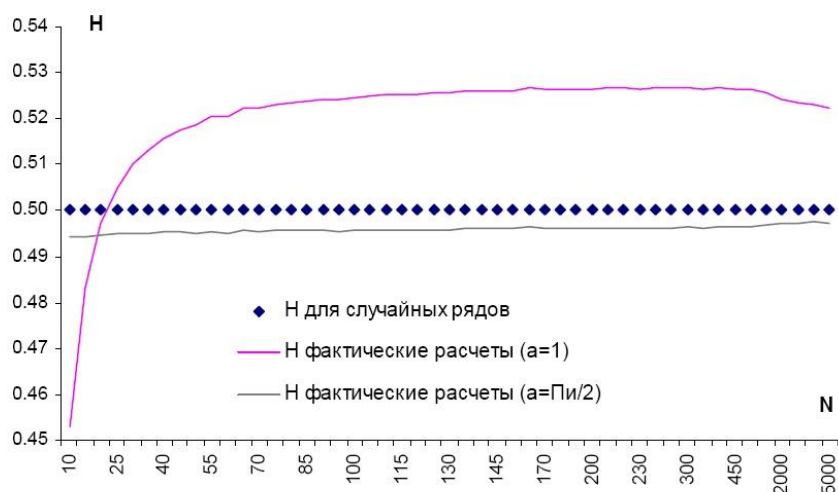
Проведенные мной расчеты для 65530 испытаний по анализу динамики ряда случайных чисел при $N = 5000$ дали следующие результаты.

Таблица 1. Теоретические (по формуле 10) и фактические значения показателя Херста для случайных рядов (N = 5000, 65530 испытаний)

Нормированный размах R/S	Теоретический H		Фактический H рядов случайных чисел		
	$\pi/2$	1	$\pi/2$	1	0.5
Константа a	$\pi/2$	1	$\pi/2$	1	0.5
Максимум H	0.5000	0.5265	0.5828	0.6137	0.6681
Минимум H	0.5000	0.5265	0.4062	0.4278	0.4657
Среднеквадратичное отклонение H	0	0	0.0242	0.0255	0.0277
Среднее значение H	0.5000	0.5265	0.4961	0.5224	0.5687

Из приведенной выше таблицы мы видим, что константа a для рядов случайных чисел действительно скорее равна $\pi/2$, так как именно данная константа позволяет получить значение показателя Херста для данных рядов близким к 0.50 (если быть точнее, фактический H случайного ряда при $a = \pi/2$ близок к $\sqrt{\pi}$). Соответственно, для дальнейших исследований рыночных рядов мы будем использовать именно эту константу $a = \pi/2$. В противном случае, например, если мы примем константу a равной 0.5, то рассчитанные таким образом значения показателя Херста окажутся существенно завышенными, а значит будут говорить о персистентности (трендовости) даже случайных рядов (см. рис. 4).

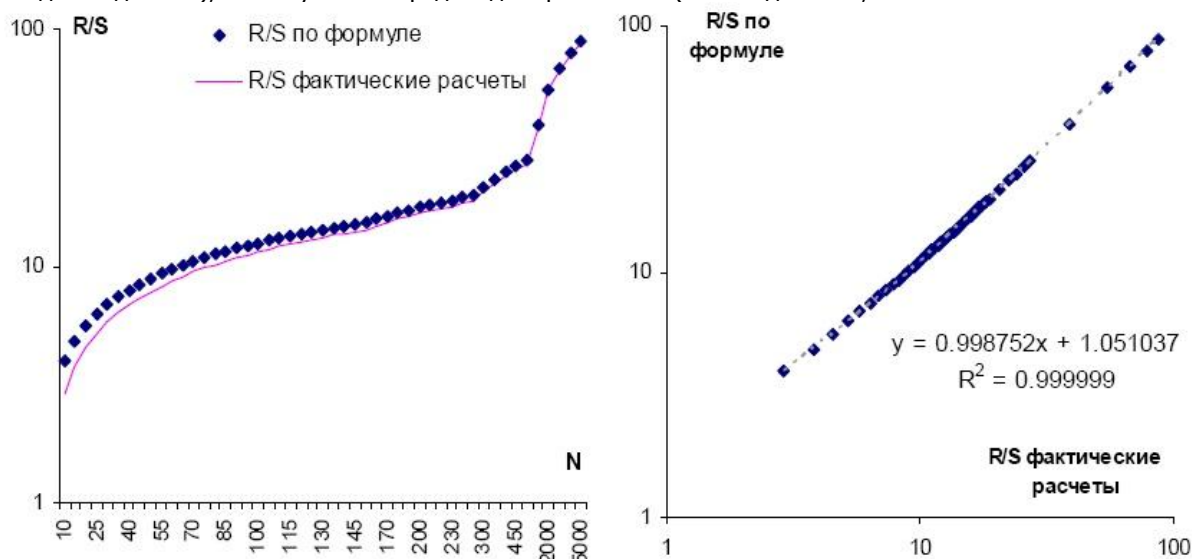
Рисунок 4. Динамика теоретического показателя Херста (для случайных рядов = 0.5) на фоне фактических значений при разных значениях константы a



Источник: собственные расчеты

При незначительных количествах наблюдений N фактические расчеты нормированного размаха R/S случайных рядов дают заметно заниженные результаты по сравнению с теоретическим R/S , рассчитанным по формуле 10 (см. рис. 5). Данное несоответствие порождает меньшие значения показателя Херста при малых N .

Рисунок 5. Графики корреляции между теоретическими (по формуле 10) и фактическими значениями R/S (по исходным данным), на случайных рядах для разных N (от 10 до 5000, количество испытаний 65530)



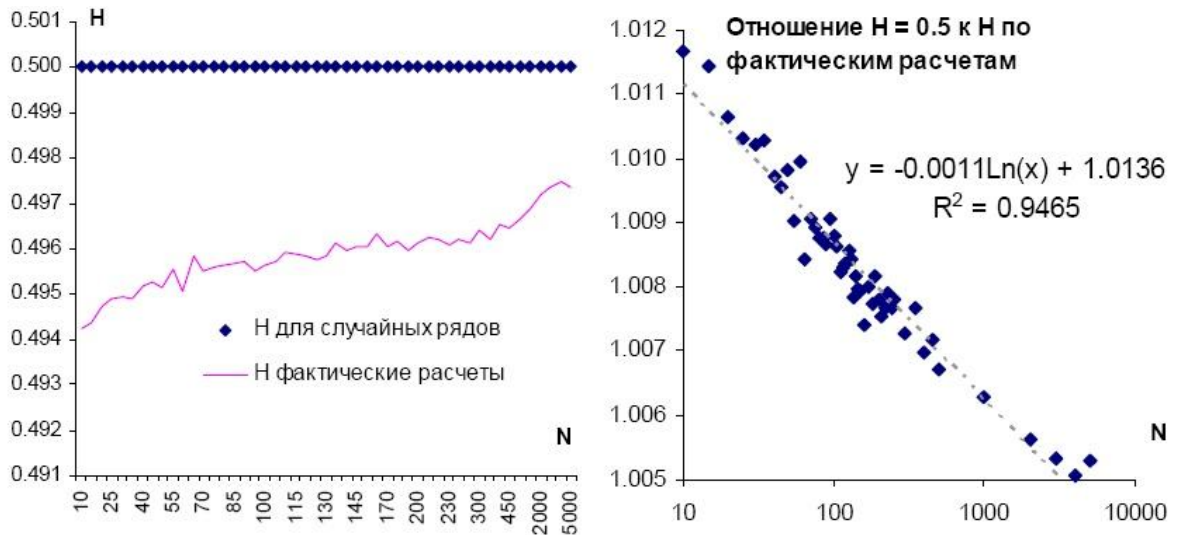
Источник: собственные расчеты

Чтобы устранить возникающее несоответствие, особенно заметное при N до 250, мы должны будем фактически рассчитанные значения нормированного размаха исследуемого ряда исходных данных преобразовать при помощи следующей формулы:

$$R / ST = R / S \times 0.998752 + 1.051037 . (12)$$

Однако из-за особенностей логарифмических расчетов показателя Херста скорректированное значение нормированного размаха (R/ST) также будет содержать незначительную погрешность. И мы вновь увидим, что чем меньше количество наблюдений N , тем больше будет отставание рассчитанного по такому R/ST показателя Херста (см. рис. 6).

Рисунок 6. Динамика показателя Херста (стандартный для случайных рядов, $H = 0.5$) и фактического показателя Херста (на случайных рядах для разных N , количество испытаний 65530)– слева. Корреляция между количеством наблюдений N и отношением стандартного и фактического показателей Херста – справа



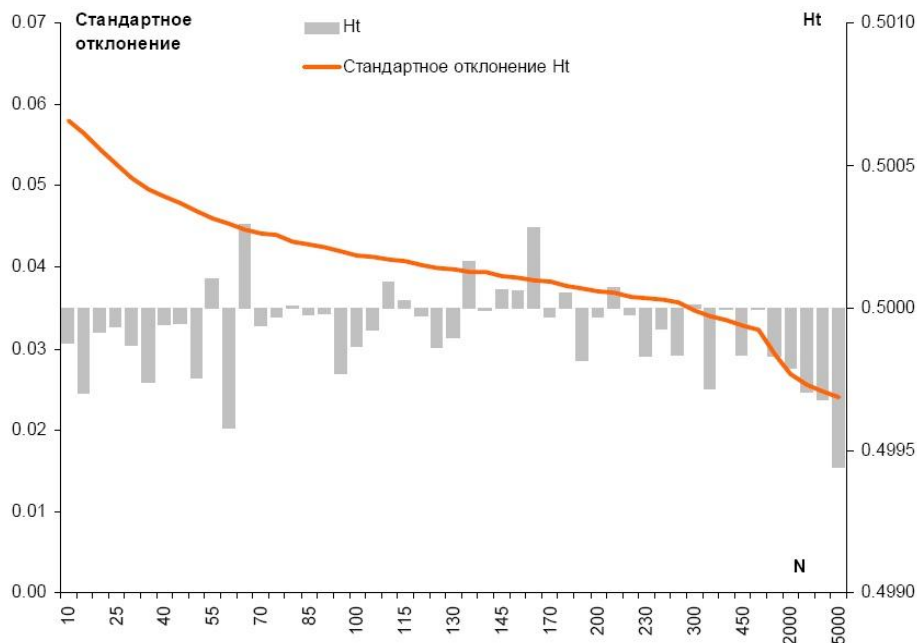
Источник: собственные расчеты

Основываясь на корреляции между количеством наблюдений N и отношением стандартного и фактического показателей Херста, мы должны будем скорректировать формулу расчета показателя Херста таким образом, чтобы его значение было максимально приближено к стандартному для случайных рядов ($H = 0.5$) для всех N . Окончательная формула для вычисления показателя Херста будет выглядеть следующим образом:

$$H_T = \frac{\log(R/S_T)}{\log(\pi \times N/2)} \times (-0.0011 \times \ln(N) + 1.0136). \quad (13)$$

Завершая исследование свойств показателя Херста применительно к случайным рядам, посмотрим также на динамику среднеквадратичного отклонения данного показателя. На следующем рисунке мы видим, что с ростом количества наблюдений N стандартное отклонение ряда рассчитанных показателей Херста H_T снижается (см. рис. 7).

Рисунок 7. Динамика стандартного отклонения показателя Херста (H_T) на фоне самого показателя для различных N (количество испытаний 65530)



Источник: собственные расчеты

Данный факт ухудшает предсказательные способности показателя Херста для незначительных N . Показатель Херста призван дать ответ на вопрос, каким будет следующее значение исследуемого ряда, больше или меньше текущего. Например, каким будет следующий x_{n+1} , больше или меньше текущего x_n , если текущий x_n больше x_{n-1} ?

При $N = 0$ следующий x_{n+1} будет точно меньше текущего (антитренд, антиперсистентный ряд). При $N = 1$ следующий x_{n+1} будет точно больше текущего (тренд, персистентный ряд). При $N = 0.5$ непредсказуемо, каким будет следующий x_{n+1} (ряд случайных независимых изменений). Если взять за правило трех сигм (Правило трех сигм (3σ): с достоверностью 99.73% (то есть почти 100%) все значения нормально распределённой случайной величины лежат в интервале $\{x \pm 3\sigma\}$), то при $N = 10$ (а в этом случае стандартное отклонение является почти максимально высоким):

- показатель Херста должен быть выше 0.674 (три стандартных отклонения от 0.5 при $a = p/2$) чтобы можно говорить – исследуемый ряд скорее всего персистентный, то есть обладает признаками присутствия тренда;

- показатель Херста должен быть меньше 0.326 (три стандартных отклонения от 0.5) чтобы можно говорить – исследуемый ряд скорее всего антиперсистентный;

- если показатель Херста находится в интервале 0.326-0.674, то ряд с вероятностью 99.73% является случайным.

Опять же мы помним, что с ростом числа наблюдений N среднеквадратичное отклонение уменьшается показателя Херста. Поэтому, например, если показатель Херста исследуемого ряда с $N = 5000$ находится в интервале 0.428-0.571, то такой ряд с вероятностью 99.73% является случайным. Итак, мы можем использовать в качестве критерия случайности или неслучайности рядов данных правило трех сигм из следующей таблицы.

Таблица 2. Интервалы значений показателя Херста, рассчитанного по исходным данным, а также соответствующие вероятностные характеристики исследуемых рядов (рассчитаны как $H_T \pm \sigma$)

N	Показатель Херста H_T			N	Показатель Херста H_T		
	до ...	от ... и до ...	свыше ...		до ...	от ... и до ...	свыше ...
15	0.330	0.330 - 0.669	0.669	135	0.382	0.382 - 0.619	0.619
20	0.337	0.337 - 0.663	0.663	140	0.382	0.382 - 0.618	0.618
25	0.342	0.342 - 0.658	0.658	145	0.383	0.383 - 0.617	0.617
30	0.347	0.347 - 0.653	0.653	150	0.384	0.384 - 0.616	0.616
35	0.351	0.351 - 0.648	0.648	160	0.385	0.385 - 0.615	0.615
40	0.354	0.354 - 0.646	0.646	170	0.386	0.386 - 0.614	0.614
45	0.356	0.356 - 0.644	0.644	180	0.387	0.387 - 0.613	0.613
50	0.359	0.359 - 0.640	0.640	190	0.388	0.388 - 0.612	0.612
55	0.362	0.362 - 0.638	0.638	200	0.389	0.389 - 0.611	0.611
60	0.364	0.364 - 0.635	0.635	210	0.390	0.390 - 0.610	0.610
65	0.366	0.366 - 0.632	0.634	220	0.391	0.391 - 0.609	0.609
70	0.367	0.367 - 0.631	0.631	230	0.391	0.391 - 0.608	0.608
75	0.368	0.368 - 0.630	0.630	240	0.392	0.392 - 0.607	0.607
80	0.371	0.371 - 0.629	0.629	250	0.393	0.393 - 0.606	0.606
85	0.372	0.372 - 0.628	0.628	300	0.396	0.396 - 0.604	0.604
90	0.373	0.373 - 0.627	0.627	350	0.398	0.398 - 0.602	0.602
95	0.374	0.374 - 0.625	0.625	400	0.400	0.400 - 0.600	0.600
100	0.376	0.376 - 0.624	0.624	450	0.401	0.401 - 0.598	0.598
105	0.376	0.376 - 0.624	0.624	500	0.403	0.403 - 0.597	0.597
110	0.377	0.377 - 0.623	0.623	1000	0.412	0.412 - 0.588	0.588
115	0.378	0.378 - 0.622	0.622	2000	0.419	0.419 - 0.580	0.580
120	0.379	0.379 - 0.621	0.621	3000	0.423	0.423 - 0.576	0.576
125	0.380	0.380 - 0.620	0.620	4000	0.426	0.426 - 0.574	0.574
130	0.381	0.381 - 0.619	0.619	5000	0.428	0.428 - 0.571	0.571
Ряд с вероятностью 99.73%	антиперсистентный	случайный	трендовый	Ряд с вероятностью 99.73%	антиперсистентный	случайный	трендовый

После подробного исследования свойств исходных случайных рядов, на основании которого мы составили формулу для расчета H_T , мы можем рассмотреть реальный пример расчета показателя Херста на данных о динамике валютной пары EUR/USD.

Таблица 3. Пример расчета показателя Херста по ценам закрытия валютной пары EUR/USD (количество значений ряда $N = 20$)

Таблица 3. Пример расчета показателя Херста по ценам закрытия валютной пары EUR/USD (количество значений ряда $N = 20$)

Дата	Последняя цена дня	$(x_i - X)$	$\sum(x_i - X)$
03-апр-09	1.3484	0.0302	0.0302
06-апр-09	1.3398	0.0216	0.0518
07-апр-09	1.3264	0.0082	0.0600
08-апр-09	1.3264	0.0082	0.0682
09-апр-09	1.3161	-0.0021	0.0660
10-апр-09	1.3174	-0.0008	0.0652
13-апр-09	1.3364	0.0182	0.0834
14-апр-09	1.3261	0.0079	0.0913
15-апр-09	1.3213	0.0031	0.0944
16-апр-09	1.3177	-0.0005	0.0939
17-апр-09	1.3023	-0.0159	0.0780
20-апр-09	1.2923	-0.0259	0.0521
21-апр-09	1.2942	-0.0240	0.0281
22-апр-09	1.3000	-0.0182	0.0099
23-апр-09	1.3132	-0.0050	0.0048
24-апр-09	1.3240	0.0058	0.0106

Расчет показателя Херста

Эрик Найман

27-апр-09	1.3016	-0.0166	-0.0060
28-апр-09	1.3134	-0.0048	-0.0108
29-апр-09	1.3249	0.0067	-0.0041
30-апр-09	1.3223	0.0041	0.0000*
Среднеарифметическое X	1.3182	Максимум	0.0944
Стандартное отклонение S	0.0148	Минимум	-0.0108
Размах R	0.0944 - (-0.0108) =		0.1052
Нормированный размах R/S	0.1052 / 0.0148 =		7.0992
Log (R/S)	Log (7.0992) =		0.8512
Log (N^{π/2})	Log (20 * 3.1416 / 2) =		1.4971
Показатель Херста H	0.8512 / 1.4971 =		0.5686
Расчет R/S_T	7.0992 * 0.998752 + 1.051037 =		8.1414
Log (R/S_T)	Log (8.1414) =		0.9107
Показатель Херста H_T	0.9107 / 1.4971 * (-0.0011 * Ln (20) + 1.0136) =		0.6146

* это значение всегда должно быть равно нулю

Перед исследователями показателей Херста, рассчитываемых по рыночным ценам, часто встает вопрос, какие ряды исследовать - непосредственно ряды данных или изменений этих данных. Например, логарифмы отношений текущих значений к предыдущим, что обычно используется при анализе рыночных котировок. Мои исследования показали, что нормированный размах логарифмов изменений случайных рядов намного меньше, нежели нормированный размах логарифмов изменений линейных [растущих или нисходящих] рядов. В результате, показатели Херста, рассчитанные по логарифмам изменений линейных рядов данных достигают гигантских величин. И если мы возьмем ряд данных, которые выказывают определенные признаки трендовости, рассчитаем по нему логарифмы изменений, то почти наверняка показатель Херста такого ряда намного превысит единицу. И это будет типичным случаем для трендовых рядов. В связи с этим отсутствует аналитическая суть показателя Херста, рассчитанного по логарифмам изменений рядов данных. В связи с этим в дальнейшем мы будем использовать классическую модель расчета показателя Херста – по исходным рядам данных.

Если обобщить полученные знания о показателе Херста, то можно сделать следующие выводы. Так, центр показателя Херста, характеризующего случайные ряды находится на уровне 0.50. Остальные характеристики приведены в следующей таблице.

Варианты расчетов показателя Херста (H_T)	Характеристика рынка
$H=0$	Рынок «мертвый», никаких движений или они цикличны с очень большой частотой колебаний Рынок стремится возвратиться к среднему значению.
$0 \leq H < 0.5$	Ряд неустойчив. Чем H ближе к 0, тем неустойчивей динамика цен (за подъемом следует спад и наоборот)
$H = 0.5$	Ряд абсолютно случайный, события не зависят друг от друга
$0.326 \leq H \leq 0.674$	Ряд с высокой вероятностью случайный. События, скорее всего, не зависят друг от друга
$0.5 < H \leq 1$	Трендоустойчивый (<i>персистентный</i>) рынок. Чем H ближе 1, тем сильнее тренд (за подъемом наверняка последует подъем, а за спадом - спад). Рынок обладает долговременной памятью - будущее зависит от прошлого
$H \approx 0.72$	Эмпирическое значение показателя Херста для природных явлений
$H \rightarrow 0.86$	К этому значению стремится линейный [растущий или нисходящий] тренд при сравнительно больших N (до 5000)
$H > 1$	Очень редкое явление. Возникают независимые скачки амплитуды, распределенные по Леви

Расчет полной фазы колебаний (длины цикла) и первой фазы исследуемого периодического ряда

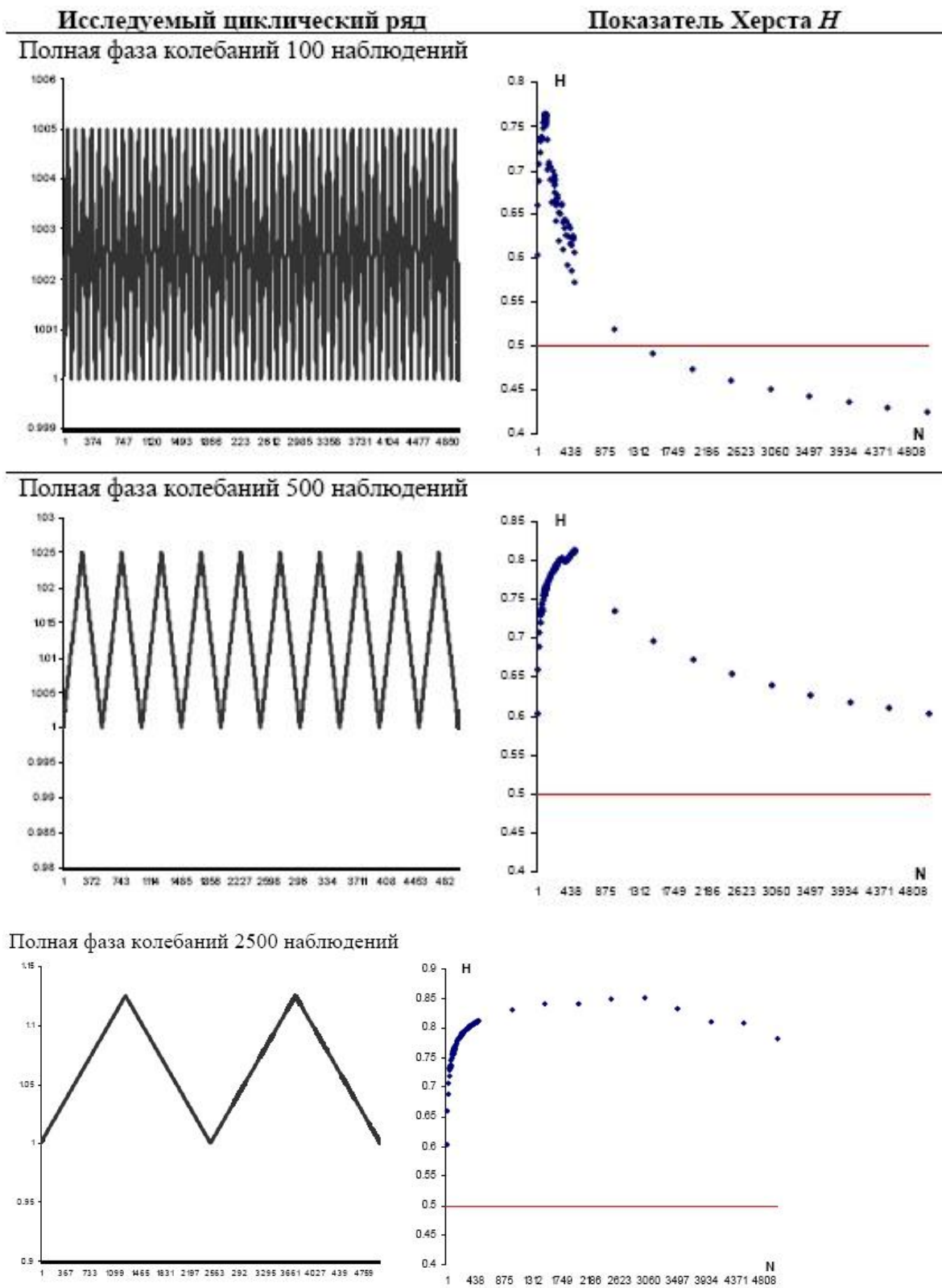
Случайные ряды - это одна сторона известных нам явлений. Другая сторона – это линейные и циклические ряды. Они безусловно обладают определенными трендовыми характеристиками, по крайней мере на протяжении некоторого периода времени.

Для любых прямолинейных рядов (например, $\{1.0001; 1.0002; 1.0003; \dots; x_n = x_{n-1} + c, \text{ где } c = 0.0001\}$) показатель Херста достигает персистентного значения (то есть почти гарантированно начинает проявлять трендовость) самое раннее на двадцать первое наблюдение (при $a = \pi/2$). Таким образом, для выявления тренда нужно не менее чем 21 наблюдение ($N \geq 21$).

Показатель Херста этих же прямолинейных [растущих или нисходящих] рядов стремится к 1 при совершенно гигантских с точки зрения реалий финансовых рынков значениях количества наблюдений N . На реальных для работы на финансовых рынках интервалах времени от 40 до 100 наблюдений показатель Херста, рассчитанный для прямолинейных рядов находится в интервале от 0.707 до 0.755. Кстати, автор показателя Гарольд Херст вычислил его значение H для неслучайных рядов природных явлений равным приблизительно 0.72, что находится в интервале 0.707-0.755 и соответствует 50 наблюдениям прямолинейного [растущего или нисходящего] тренда.

Для линейных растущих или снижающихся рядов при константе $a = \pi/2$ показатель Херста на реальных жизненных исследуемых интервалах (в пределах $N = 5000$) не превышает 0.86 (см. рис. 8). А это далеко до единицы, которую предлагают использовать в качестве эталонного персистентного ряда ($H = 1$). К единице показатель Херста для подобных по количеству наблюдений N рядов приближается только при константе $a \leq 0.45$. Но, как мы уже знаем, такие значения константы будут завышать значения показателя Херста для случайных рядов. А значит, будет повышаться риск принять случайный ряд за обладающий трендовыми или наоборот, антитрендовыми характеристиками.

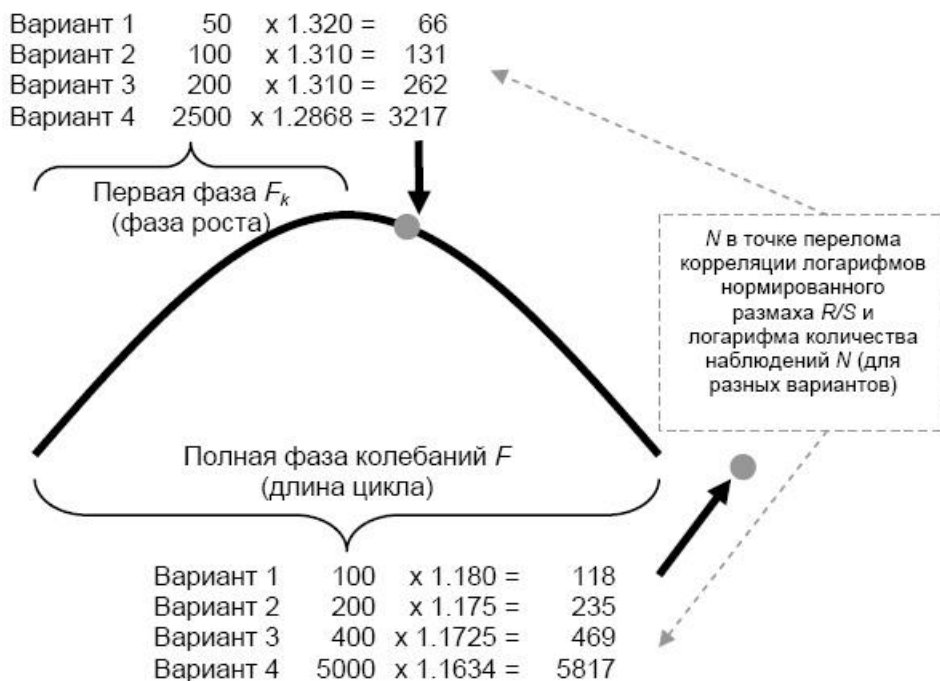
Рисунок 8. Схематичная динамика исследуемого ряда и соответствующих значений показателя Херста (константа $a = \pi/2$)



Источник: собственные расчеты

С уменьшением частоты колебаний (увеличением длины цикла) пик показателя Херста сдвигается вправо. При этом пик H находится немного дальше первой фазы колебаний. Например, для полной фазы колебаний в 100 наблюдений (50 в фазе роста и 50 в фазе снижения) пик H находится в районе 118-го наблюдения (см. рис. 9).

Рисунок 9. Схематичное представление расчета длины цикла, если мы знаем точку перелома корреляции R/S и N (четыре варианта N)



Отсюда мы можем рассчитать полную фазу колебаний (длину цикла), присущую исходному ряду анализируемого ряда. Делается это исходя из знания N в точке наблюдения локального экстремума N при помощи следующих формул (степень достоверности 1.0000):

$$F = 0.83447 \times N^{1.003456}, \text{ где} \quad (14)$$

F – полная фаза цикла (длина цикла);

N – количество наблюдений в точке перелома корреляции логарифмов нормированного размаха R/S и количества наблюдений N .

Длина цикла, конечно же, не является стабильной величиной. Однако она нам даст как минимум значение рекомендуемого для расчета показателя Херста количества наблюдений N .

Аналогичным образом определяем первую фазу цикла (длину первой волны, обычно соответствует длине импульса тренда):

$$F_k = 0.7385 \times N_k^{1.0063}, \text{ где} \quad (15)$$

F_k – первая фаза цикла (длина первой волны, импульса тренда);

N_k – количество наблюдений в точке перелома корреляции логарифмов нормированного размаха R/S и количества наблюдений N_k (отличается от значения N полной фазы цикла).

При необходимости мы также можем вычислить вторую фазу цикла (соответствует длине коррекции тренда):

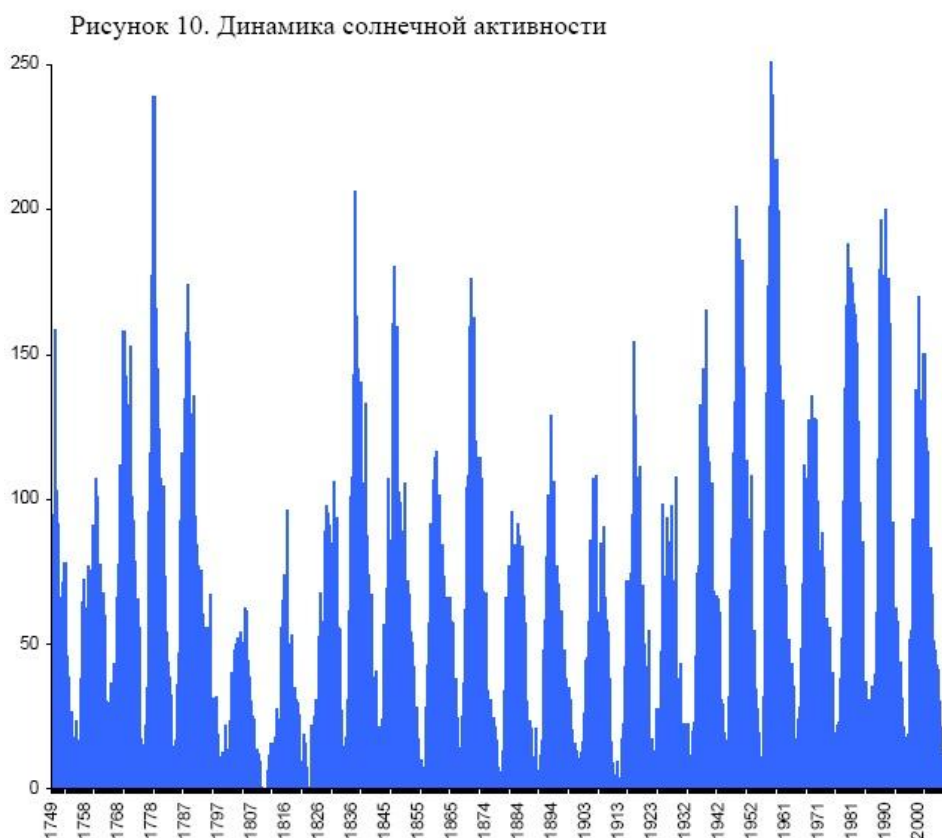
$$F_l = F - F_k, \text{ где} \quad (16)$$

F_l – вторая фаза цикла (длина второй волны, коррекции тренда).

Расчет показателя Херста ряда значений солнечной активности

Рассмотрим реальный пример циклического ряда. Возьмем, например, динамику солнечной активности (Sunspot numbers, ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/STP/SOLAR_DATA/SUNSPOT_NUMBERS/MONTHLY), ежемесячные цифры с января 1749 года по апрель 2009 года включительно, всего $N = 3124$ значений (см. рис. 10).

Рисунок 10. Динамика солнечной активности

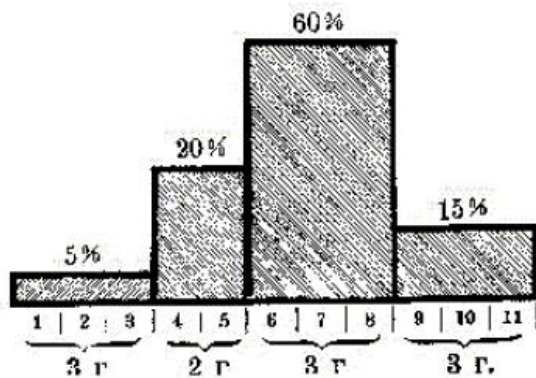
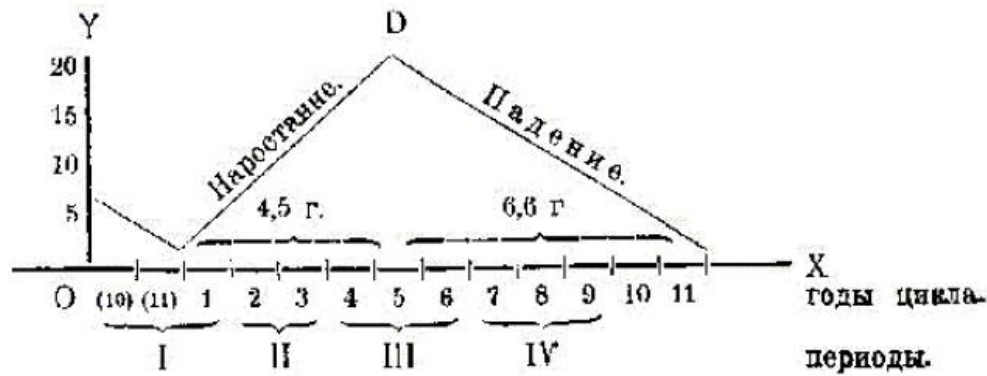


Источник: ftp://ftp.ngdc.noaa.gov/STP/SOLAR_DATA/SUNSPOT_NUMBERS/MONTHLY

На приведенном выше рисунке мы ясно видим циклы солнечной активности, периоды которых составляют в среднем 11 лет (132 месяца, всего за исследуемый период было 23 полных цикла «подъем-спад» общей продолжительностью 3031 месяц). Минимальная длина цикла составляла 81 месяц, максимальная длина – 206 месяцев, стандартное отклонение 27 месяцев. Зная все это, мы вправе ожидать от показателя Херста, что он подтвердит цикличность и трендовость рынка.

Полный цикл солнечной активности состоит из двух неравных фаз – первая фаза роста в среднем из 4.5 лет (54 месяца) и вторая фаза снижения из 6.5 лет (78 месяцев). На подобное строение ряда изменений солнечной активности обратил внимание известный русский ученый Александр Чижевский (см. рис. 11).

Рисунок 11. Схематичное отображение полного цикла солнечной активности по А.Л.Чижевскому



Источник: А.Л. Чижевский, «Физические факторы исторического процесса». Калуга, 1924

В следующей таблице даны два варианта расчета показателей Херста для полного ряда значений солнечной активности ($N = 3124$).

Таблица 5. Показатели Херста, рассчитанные по ряду помесечных данных о солнечной активности при различных значениях константы a .

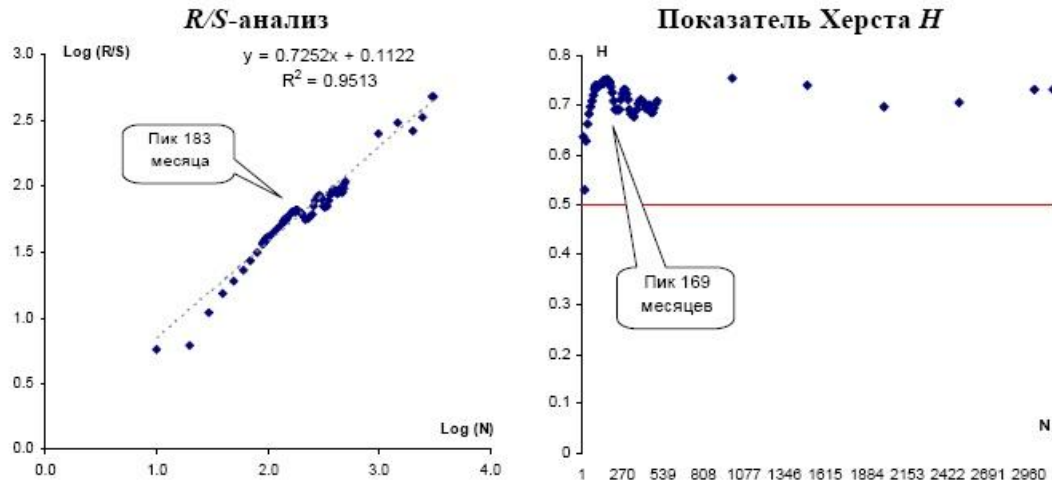
Таблица 5. Показатели Херста, рассчитанные по ряду помесечных данных о солнечной активности при различных значениях константы a

Варианты расчетов	$a = 1$	$a = 0.5$	$a = \pi/2$
Исходные данные (H_T)	0.771	0.844	0.730
Справочно: Случайным образом перемешанные исходные данные (H_T)	0.553	0.605	0.524

Справочные варианты расчета показателя Херста по случайным образом перемешанным данным о солнечной активности призваны проверить наши расчеты по оригинальным исходным данным. Если бы в расчеты вкралась ошибка, то мы бы увидели достаточно большое отклонение показателя Херста, рассчитанного по ряду случайно перемешанных данных от 0.5. Но его значение составило 0.524 и значит, исходный ряд действительно обладает трендовостью. Подтверждает этот вывод тот факт, что показатель Херста H_T намного превысил интервал значений, присущий случайным рядам с вероятностью 99.73% (от 0.423 до 0.576 для $N = 3000$).

Для наглядности рассмотрим динамику показателей Херста для различных N (см. рис. 12).

Рисунок 12. Динамика показателей Херста и корреляции между $\log(R/S)$ и $\log(N)$ ряда солнечной активности



Источник: собственные расчеты

Перелом корреляции нормированного размаха R/S и количества наблюдений N находится в районе 183-го наблюдения (полный цикл). А локальный пик показателя Херста оказался в районе 169-го месяца. Значение N для полного цикла будет намного выше известного нам стандартной длины цикла солнечной активности (132 месяца). Это подтверждает сделанный нами ранее вывод о превышении длины цикла по R/S -анализу над его реальным значением.

Пик показателя Херста в районе перелома корреляции нормированного размаха и количества наблюдений произошел в районе 169-го месяца. Поэтому для дальнейших расчетов следует использовать количество наблюдений $N = 169$. Так как речь идет о полном цикле, мы можем рассчитать полную его длину:

$$F = 0.83447 \times N^{1.003456} = 0.83447 \times 169^{1.003456} = 144. \quad (17)$$

Отсюда мы видим, что полная длина цикла очень близка к эмпирически известным 132 месяцам, хотя и превышает эту величину. Такая разница может объясняться не фиксированной величиной цикла. Мы помним, что его общая продолжительность на известном ряде значений солнечной активности находилась в достаточно широком интервале от 81 до 208 месяцев. И 144 месяца на фоне такого широкого интервала находятся достаточно близко к среднему значению 132 месяца.

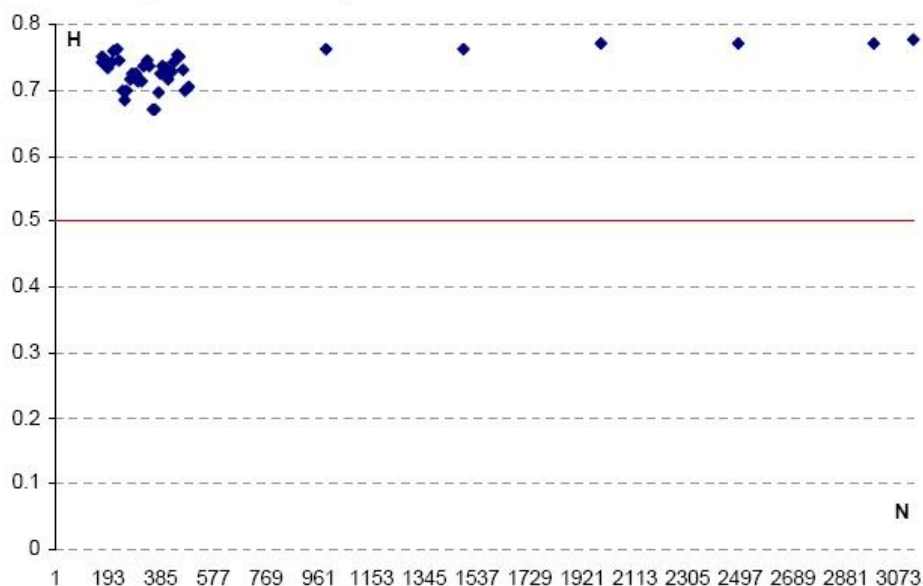
Локальный максимум показателя Херста наблюдался в районе 95-го месяца. Поэтому для расчета первой фазы цикла (в нашем случае – фазы снижения солнечной активности, так как ряд данных начинается именно с фазы снижения, см. рис. 13) мы будем использовать количество наблюдений $N_k = 95$:

$$F_k = 0.7385 \times N^{1.0063} = 0.7385 \times 95^{1.0063} = 72. \quad (18)$$

Полученное число достаточно близко к фактическому значению фазы снижения солнечной активности (78 месяцев).

Если рассчитать показатель Херста по $N = 169$, то мы увидим, что за все время наблюдений он не снижался ниже 0.67, а его среднее значение составляло 0.73 (см. рис. 13).

Рисунок 13. Динамика показателя Херста, рассчитанного по значениям солнечной активности ($N = 169$ и $a = \pi/2$)



Источник: собственные расчеты

Итак, показатель Херста, рассчитанный по исходным данным говорит о том, что солнечная активность обладает трендовостью. Значение H_T ряда солнечной активности близко к 0.72 (при константе $a = \pi/2$), определенного Гарольдом Херстом как общее значение H для природных явлений. Повторюсь, очень важно, что показатель Херста случайным образом перемешанного ряда значений солнечной активности находится в районе 0.5, где ему и место. Это подтверждает наличие трендов в ряде солнечной активности.

Расчет показателя Херста рядов экономических и рыночных данных

Все дальнейшие расчеты рыночных цен различных товаров, а также макроэкономических индикаторов проведем здесь по исходным данным. Мы помним, что показатель Херста будет говорить о персистентности исследуемого ряда: наличии тренда, его отсутствию или стремлении к возврату к среднему (антитренд). Для начала рассчитаем, обладают ли котировки валютных пар трендовой составляющей или нет, они подчиняются закону случайных колебаний.

Таблица 6. Показатели Херста H_T рядов валютных пар (константа $a = \pi/2$), расчет по ценам закрытия

Таблица 6. Показатели Херста H_T рядов валютных пар (константа $a = \pi/2$), расчет по ценам закрытия

Валютная пара	2008 год (закрытие дня)	2008 год (закрытие часа)	20 апреля 2008г. (закрытие минуты)	31 марта 2008г. (закрытие минуты)
	N=260	N=6180	N=1440	N=1440
EUR/USD	0.781	0.855	0.832	0.820
GBP/USD	0.788	0.860	0.847	0.806
USD/CHF	0.783	0.857	0.772	0.841
USD/JPY	0.756	0.838	0.836	0.823
EUR/GBP	0.726	0.816	0.848	0.834
EUR/CHF	0.766	0.844	0.840	0.839
EUR/JPY	0.782	0.855	0.837	0.831
GBP/CHF	0.756	0.838	0.848	0.838
GBP/JPY	0.780	0.854	0.844	0.824

CHF/JPY	0.779	0.853	0.835	0.832
USD/CAD	0.781	0.855	0.848	0.825
EUR/CAD	0.708	0.808	0.849	0.839
AUD/USD	0.790	0.861	0.844	0.834
AUD/JPY	0.787	0.859	0.842	0.832
NZD/USD	0.792	0.863	0.837	0.828
XAU/USD	0.773	0.850	0.784	0.757
XAG/USD	0.798	0.866	0.808	0.758
Среднее значение	0.772	0.849	0.832	0.821

В приведенной выше таблице мы видим, что поведение всех представленных валютных пар на всех рассмотренных периодах времени (день, час, минута) персистентно. Следовательно, как минимум на валютном рынке мы можем наблюдать тренды исходных рядов (показатель НТ): за ростом котировок скорее всего последует продолжение роста, а за падением продолжение снижения.

Так мы получаем математическое подтверждение известного эмпирического правила:

«Тренд – ваш друг». Кроме того, именно по этой причине какой интервал времени вы не выберете – например, день, час или минута – все графики будут выглядеть похоже. Однако схожими выглядят только линейные чарты. Если, например, вы будете смотреть на бары или японские свечи, то здесь различие станет более очевидным. А все благодаря размаху между максимальными и минимальными ценами, тем большими, чем больший интервал времени вы возьмете. Но об этом позже.

Кроме собственно знания о трендовости поведения экономических показателей важно понимать типичный срок жизни долговременной памяти, которая и порождает его трендовость. Для этого пригодится знание о длине полного цикла, а также его первой и второй фаз. В следующей таблице мы увидим результаты расчетов рыночных цен и макроэкономических индикаторов – наличие персистентности и длину стандартного цикла.

Таблица 7. Показатели Херста НТ рядов фондовых индексов, нефти и макроэкономических показателей США (константа $a = \pi/2$), данные помесячные (кроме ВВП и валютных пар)

Показатель	N, месяцев	Нт	Длина цикла F (первая-вторая фаза)*	Нт (для полного цикла)
Индикаторы фондового рынка				
Фондовый индекс DJIA	1156	0.795	117 (84-33)	0.762
Коэффициент P/E	1156	0.737	64 (43-21)	0.758
Коэффициент P/D	1156	0.793	64 (32-32)	0.736
Коэффициент EPS	1156	0.809	59 (36-23)	0.751
EPS к фондовому индексу S&P 500	1156	0.742	63 (42-21)	0.754
Индикаторы денежного рынка				
Процентная ставка Fed Fund	659	0.790	44 (29-15)	0.732
Доходность 10-летних T-Notes	1156	0.819	66 (43-23)	0.748
Спрэд доходности 10-летних T-Notes и 3-месячных T-Bills	1156	0.776	66 (43-23)	0.748
Индикаторы валютного и товарного рынков				
Реальный индекс доллара США	436	0.718	92 (69-23)	0.743
Валютная пара EUR/USD (1 день, рабочий)	2143	0.833	162 (96-66)	0.771
Валютная пара EUR/USD (1 час, 2008 год)	6180	0.855	87(45-42)	0.721
Валютная пара EUR/USD (1 минута, 20 апреля 2008 года)	1440	0.832	56 (25-21)	0.683
Валютная пара USD/DEM (тики, 23 января 1998 года)	4150	0.844	128 (72-56, 72 тика \approx 25 минут)	0.764
Товарный индекс CRB	747	0.826	35 (19-16)	0.719
Реальная стоимость нефти	312	0.776	78 (55-23)	0.765
Стоимость золота относительно фондового индекса S&P 500	1156	0.781	47 (27-20)	0.724
Макроэкономические индикаторы				
Реальный ВВП (квартал)	249	0.789	58 (32-26)	0.730
Уровень безработицы	735	0.778	60 (38-22)	0.711

Индекс потребительских цен (% год-к-году)	1143	0.730	116 (61-55)	0.760
Индекс цен в промышленности (% год-к-году)	732	0.747	36 (20-16)	0.720
Индекс цен инвестиционных товаров % год-к-году)	1143	0.742	46 (30-16)	0.730
Промышленное производство	1083	0.830	99 (70-29)	0.753
Индекс производственной активности ISM	735	0.665	46 (29-17)	0.706
Загрузка производственных мощностей	507	0.694	53 (28-25)	0.745
Реальные цены на жилые дома (первичный рынок)	555	0.804	92 (53-39)	0.744
Цены на жилые дома (первичный рынок) относительно ВВП на душу населения	555	0.713	111 (72-39)	0.763
Запас непроданных домов	555	0.735	75 (44-31)	0.634
Денежная масса M2 (% год-к-году)	592	0.768	76 (44-32)	0.741
Солнечная активность	3124	0.730	144 (72-72)	0.750

* - под длиной цикла здесь понимается продолжительность полного цикла «подъем-спад» рассчитанного по формуле 14, длина первой фазы дана в скобках и рассчитана по формуле 15

Как мы видим, во всех представленных выше случаях динамике рыночных цен соответствуют показатели Херста H намного больше 0.5, то есть динамика рыночных цен и макроэкономических индикаторов не является случайной. И для этого есть как минимум две веские причины. Во-первых, рыночная информация не сразу учитывается в ценах. Это происходит в том числе по причине не одинакового доступа к информации у разных рыночных игроков. Во-вторых, с течением времени влияние информации снижается. Так на рынке проявляется известный психологический феномен как память рынка.

Память рынка можно охарактеризовать двумя словами - рынок инерционен. Этот тезис может оправдать существование гипотезы фрактального рынка (Fractal Market Hypothesis, FMH), которая является альтернативой гипотезы эффективного рынка (Effective Market Hypothesis, EMH). Так как при помощи показателя Херста можно вычислить фрактальную размерность, то он является необходимым элементом гипотезы фрактального рынка.

Почему же на финансовых рынках возникает эффект инерции цены по отношению к предыдущему движению? Этот факт я попытаюсь объяснить, обратившись к психологии человеческой памяти. Показатель Херста свыше 0.50 (вернее, как мы уже знаем, 0.57) со своей стороны подтверждает наличие долговременной памяти рынка – настоящее зависит от прошлого, а будущее – от настоящего.

Как показали современные исследования в области человеческой памяти - человек ежедневно «теряет» до 25 процентов информации, полученной ранее. Под информацией здесь понимается не только получение каких-либо знаний, но и психологические переживания, связанные с получением этих знаний. Применительно к финансовым рынкам, приведенное выше утверждение будет выглядеть следующим образом. Если в понедельник на рынке было сильное повышение цен, трейдер в этот день, естественно, будет помнить полный объем информации, связанной с ростом цен и находиться под впечатлением этого роста. Во вторник в памяти трейдера останется около 75% как психологических переживаний вчерашнего дня, так и конкретного информационного наполнения, послужившего причиной для роста цен. В среду процент памяти событий понедельника снизится до 50%, в четверг - до 25%, а в пятницу - оставит лишь легкий след воспоминаний.

Реально же процент забывания может варьироваться в зависимости от событий последующих дней. Если во вторник в нашем примере рост цен продолжится, то впечатления понедельника только усилятся и в среду в памяти трейдера повышение понедельника и вторника останется довольно-таки ярким событием. Процент памяти здесь будет больше 75%. Если же во вторник цены наоборот снизятся, то события понедельника к среде потеряют в своем весе больше, нежели 50%.

Таким образом, необходимо рассматривать память трейдера в одной непрерывной цепочке событий, где последним событиям будет придаваться больший вес. Это напомним нам расчет экспоненциальной средней. Какой же вывод мы сможем сделать в результате всего вышесказанного.

Так как на второй и третий день (вторник и среду в нашем примере) трейдер помнит большую часть событий первого дня, то эта память будет накладывать значительный отпечаток на его действия в эти дни. Мало кто отважится продавать на сильном бычьем рынке, если для подобных действий нет достаточных оснований. Но после сильного движения страх продажи будет сказываться еще несколько дней, постепенно ослабляя свою хватку.

В реальном мире часто бывает, что сильное движение пятницы продолжается в понедельник, иногда захватывая первую половину вторника. Сильные изменения цен во вторник/среду ослабевают к четвергу/пятнице. Зная это и понимая причины такого поведения рынка, можно избежать поспешных действий и вовремя остановиться от продолжения работы по тренду.

Инерционность рынка позволяет сделать один важный вывод - вы будете гораздо лучше понимать рынок, если научитесь видеть его глазами среднего трейдера. А свои действия средний трейдер в значительной мере основывает на предыдущих рыночных событиях. Однако это не означает, что вы должны опуститься до уровня знаний среднего трейдера.

Кстати, один из основополагающих принципов технического анализа основывается именно на факте инерции рынка - принцип трендовости рынка. Самоусиливающийся процесс движения цен также является порождением инерционности рынка.

Расчет показателя Херста по максимумам-минимумам цен

В экономической литературе обычно дается рекомендация рассчитывать накопленный размах R по ценам закрытия. Однако это не совсем корректно, так как для практической рыночной торговли важны также минимальные и максимальные цены внутри заданного интервала. Например, мы рассматриваем ряд наблюдений на основании дневных графиков – учитываем каждый торговый день. При этом весь торговый внутридневной диапазон колеблется от минимальных до максимальных цен. Таким образом, весь интервал торгов за день будет намного шире одной единственной точки «цена закрытия».

$$H_M = \frac{\log(R/S_T)}{\log(\pi \times (N-1)/2)} \times (-0.0011 \times \ln(N-1) + 1.0136). \quad (19)$$

Пример расчета показателя Херста по интервалам цен приведен в следующей таблице.

Таблица 8. Пример расчета показателя Херста с учетом максимальных, минимальных цен и цен закрытия каждого дня валютной пары EUR/USD (количество значений ряда $N = 20$)

Дата	High (x_i)	Low (y_i)	$(x_i - X)$	$(y_i - X)$	$\sum(x_i + y_i - 2X)$
03-апр-09	1.3492	1.3364	0.0306	0.0178	0.0484
06-апр-09	1.3580	1.3357	0.0394	0.0171	0.1050
07-апр-09	1.3406	1.3226	0.0220	0.0040	0.1310
08-апр-09	1.3306	1.3146	0.0120	-0.0040	0.1390
09-апр-09	1.3333	1.3124	0.0147	-0.0062	0.1476
10-апр-09	1.3174	1.3089	-0.0012	-0.0097	0.1367
13-апр-09	1.3390	1.3124	0.0204	-0.0062	0.1509
14-апр-09	1.3379	1.3225	0.0193	0.0039	0.1742
15-апр-09	1.3294	1.3145	0.0108	-0.0041	0.1809
16-апр-09	1.3266	1.3125	0.0080	-0.0061	0.1829
17-апр-09	1.3194	1.3015	0.0008	-0.0171	0.1666
20-апр-09	1.3046	1.2887	-0.0140	-0.0299	0.1227
21-апр-09	1.2991	1.2895	-0.0195	-0.0291	0.0742
22-апр-09	1.3035	1.2885	-0.0151	-0.0301	0.0290
23-апр-09	1.3159	1.2978	-0.0027	-0.0208	0.0055
24-апр-09	1.3298	1.3111	0.0112	-0.0075	0.0093
27-апр-09	1.3240	1.2998	0.0054	-0.0188	-0.0041
28-апр-09	1.3164	1.2963	-0.0022	-0.0223	-0.0286

29-апр-09	1.3337	1.3119	0.0151	-0.0067	-0.0201
30-апр-09	1.3383	1.3190	0.0197	0.0004	0.0000*
Среднеарифметическое X	1.3186	Максимум	0.1829		
Стандартное отклонение S	0.0169	Минимум	-0.0286		
Нормированный размах R	0.1829 - (-0.0268) =				0.2114
Нормированный размах R/S	0.2114 / 0.0169 =				12.534
Log (R/S)	Log (12.5338) =				1.0981
Log ((N-1)*π/2)	Log ((20-1) * 3.1416 / 2) =				1.4749
Показатель Херста H	1.0981 / 1.4749 =				0.7445
Расчет R/S_T	12.5338 * 0.998752 + 1.051037 =				13.5692
Log (R/S_T)	Log (13.5692) =				1.1326
Показатель Херста H_M	1.1326 / 1.4749 * (-0.0011 * Ln (20-1) + 1.0136) =				0.7759

* это значение всегда должно быть равно нулю

Помните, проверку гипотезы о рынке на основе показателя Херста можно сделать, если перемешать данные. Если результат расчетов по случайным образом перемешанным данным дадут показатель H близкий к 0.5, и при этом будет отличаться от фактических расчетов, то это скажет о том, что исследуемый ряд данных не является броуновским движением. В нашем случае это условие выполняется, поэтому продолжим.

Таблица 9. Показатели Херста H_T и H_M рядов валютных пар (константа $a = \pi/2$, $N=260$), расчет по максимумам и минимумам, а также по ценам закрытия дня, 2008 год

Валютная пара	H_M (максимум- минимум дня)	H_T (цены закрытия дня)	Превышение H_M над H_T
EUR/USD	0.896	0.781	14.7%
GBP/USD	0.903	0.788	14.6%
USD/CHF	0.898	0.783	14.7%
USD/JPY	0.870	0.756	15.1%
EUR/GBP	0.838	0.726	15.4%
EUR/CHF	0.879	0.766	14.8%
EUR/JPY	0.897	0.782	14.7%
GBP/CHF	0.870	0.756	15.1%
GBP/JPY	0.895	0.780	14.7%
CHF/JPY	0.894	0.779	14.8%
USD/CAD	0.896	0.781	14.7%
EUR/CAD	0.822	0.708	16.1%
AUD/USD	0.905	0.790	14.6%
AUD/JPY	0.902	0.787	14.6%
NZD/USD	0.908	0.792	14.6%
XAU/USD	0.886	0.773	14.6%
XAG/USD	0.913	0.798	14.4%
Среднее значение	0.887	0.772	14.8%

Показатели Херста, рассчитанные по случайным рядам, независимо от их конфигурации – максимальные значения из выборки, минимальные, последние в заданном интервале или максимальные и минимальные значения – во всех случаях показатели Херста равны 0.5.

По итогам 2008 года валютные пары показали систематическое превышение показателей Херста H_M над H_T . Это говорит о большей трендовости рядов данных «максимум-минимум» по сравнению с просто ценами закрытия.

Выводы

Проведенные нами расчеты показали, что рыночные явления и экономические индикаторы не являются случайными явлениями. Данный вывод был сделан для всех рассчитанных рядов данных на разных интервалах времени.

Таким образом, в качестве основной применительно к экономическим явлениям следует использовать гипотезу фрактального рынка (Fractal Market Hypothesis, FMH), которая является альтернативой гипотезы эффективного рынка.

Отдельно стоит отметить, что показатель Херста можно использовать в качестве меры волатильности рядов данных. Эдгар Петерс в своей книге «Хаос и порядок на рынках капитала» указывает на то, что при анализе риска ценной бумаги [можно добавить «и риска другого финансового инструмента»] предпочтительнее использовать не стандартное отклонение, а фрактальную размерность. Стандартное отклонение хорошо характеризует изменчивость случайных рядов. И если относиться к рынку как к случайному процессу, то в этом случае применение стандартного отклонения в качестве главной характеристики величины риска вполне оправданно. Однако если принять, что рынки не случайны, а хаотичны, то фрактальная размерность как мера нелинейности движения цены подходит гораздо лучше. Данный факт открывает исследователям широкое поле для применения показателя Херста, например, при расчете цен опционов.

Список литературы

1. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. М.: Мир, 2000.
2. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.
3. Bachelier L., Theory of Speculation. in Cootner P. edition, The Random Character of Stock Market Price. Cambridge: MIT Press, 1964. (Originally published in 1900.)
4. Hurst H. E., Long-term Storage of Reservoirs. Transactions of the American Society of Civil Engineers 116, 1951.
5. Levy P., Theorie de l` addition des variables aleatoires. Paris: Gauthier-Villars, 1937.
6. Mandelbrot B., Statistical Methodology for Non-Periodic Cycles: From the Covariance to R/S Analysis. Annals of Economic Social Measurement 1, 1972.
7. Mandelbrot B., The Fractal Geometry of Nature. New York: W. H. Freeman, 1982.
8. Mandelbrot B., A Multifractal Walk Down Wall Street. Scientific American, 1999.
9. Peters E., Fractal Market Analysis. Applying Chaos Theory to Investment & Economics. J. Wiley & Sons, New York, 1994.